

专题论述

联合制冷循环的优化分析

严子浚

(厦门大学物理系 厦门 361005)

摘要 基于有限时间热力学理论,分析由两个内可逆卡诺制冷循环构成的联合制冷循环的优化性能。首先导出联合循环的制冷率与制冷系数的普遍关系,再由它求出活塞式和定常态流两种联合制冷循环在不同约束条件下的基本优化关系,并作了些有意义的讨论。获得一些对实际联合制冷循环有参考价值的新结论,同时还澄清了有关研究中存在的一些问题。

关键词 联合制冷循环 优化分析 有限时间热力学

一、引言

从所周知,串联连接的制冷循环在低温技术领域中具有重要意义。自有限时间热力学提出以来,曾有些学者应用这种新理论研究联合制冷循环^[1-3],获得一些由经典热力学所不可能得到的重要结论,对实际串联连接的制冷循环有指导意义和参考价值。然而,在这些研究中,有的仅研究传热时间的优化;有的则研究传热面积的优化;有的虽同时研究这两种优化,但误认为各仅适用于某种特定的模型。这样就难深入揭示联合制冷循环的普遍优化性能以及活塞式与定常态流两种联合制冷循环间的内在联系和固有区别。因此,有关联合制冷循环的优化性能,有必要应用有限时间热力学理论作进一步分析,以便建立新的更完善的联合制冷循环理论。本文将基于普遍的内可逆联合制冷循环模型,对联合制冷循环的优化性能作出新的分析,导出循环的基本优化关系,并由此讨论了活塞式和定常态流两种联合制冷循环在不同约束条件下的优化性能以及两者间的内在联系和主要区别。获得一些对实际更有指导意义的新结论,并澄清了有关研究中存在的一些问题。

二、联合制冷循环模型

考虑由两个内可逆卡诺制冷循环直接串接而无中间热源的联合制冷循环^[1,3],工作于温度分别为 T_H 和 T_L 的高、低温热源之间,第一循环高低两等温过程的温度分别为 T_1 和 T_2 ,第二循环高、低两等温过程的温度分别为 T_3 和 T_4 ,传热遵从牛顿定律。则在一循环中,第一循环放给高温热源的热量为

$$Q_1 = (T_1 - T_H)\alpha F_1 t_1 \quad (1)$$

两循环间交换的热量为

$$Q_2 = (T_3 - T_2)\beta F_2 t_2 \quad (2)$$

第二循环从低温热源吸取的热量为

$$Q_3 = (T_L - T_4)\gamma F_3 t_3 \quad (3)$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, F_1, F_2, F_3$ 和 t_1, t_2, t_3 分别为 Q_1, Q_2, Q_3 三个热交换过程的总传热系数,传热面积和传热时间。用假设定两循环的周期相同,则有

$$t_1 = t_3 \quad (4)$$

根据热力学第一定律,第一和第二循环的输入功分别为

$$W_1 = Q_1 - Q_2 \quad (5)$$

$$W_2 = Q_2 - Q_3 \quad (6)$$

而联合循环的输入功为

$$W = W_1 + W_2 = Q_1 - Q_3 \quad (7)$$

于是, 联合制冷循环的制冷系数为

$$\epsilon = Q_3 / W = (Q_1 / Q_3 - 1)^{-1} \quad (8)$$

另一方面, 由于循环是内可逆的, 因而根据热力学第二定律有

$$Q_2 / Q_1 = T_2 / T_1 \quad (9)$$

$$Q_3 / Q_2 = T_4 / T_3 \quad (10)$$

应用(1)~(4)和(8)~(10)式, 可求得无中间热源串级连接的内可逆联合制冷循环的制冷量 Q_3 与制冷系数 ϵ 间的关系为

$$Q_3 = (T_L - \frac{T_H}{1+\epsilon}) \left(\frac{1}{\alpha F_{1t_1}} + \frac{1}{\beta F_{2t_2}} + \frac{1}{\gamma F_{3t_3}} \right) \quad (11)$$

由(11)式又可得联合制冷循环的制冷率 $R (= Q_3 / \tau)$ 与制冷系数 ϵ 间的关系为

$$R = U (T_L - \frac{T_H}{1+\epsilon}) \quad (12)$$

其中

$$U = [\tau (\frac{1}{\alpha F_{1t_1}} + \frac{1}{\beta F_{2t_2}} + \frac{1}{\gamma F_{3t_3}})]^{-1} \quad (13)$$

为总的有效总传热系数, 而 τ 为循环周期。(11)~(13)式对活塞式和定常态流两种联合制冷循环模型普遍适用。

由(12)式, 可求出各种不同约束条件下循环的最佳制冷率与制冷系数间的关系, 即循环的基本优化关系。这只要在给定的约束条件下对(12)式中的 U 求优化即可达到目的。

三、不同约束条件下活塞式联合制冷循环的基本优化关系

无论是活塞式还是定常态流联合制冷循环, 其基本优化关系均与约束条件有关, 不同的约束条件将会有不同的优化结果。下面先讨论活塞式联合制冷循环在两种不同约束条件下的优化结果。

3.1 给定 $\alpha, \beta, \gamma, F_1, F_2, F_3$, 和 τ 下的基本优化关系

在 $\alpha, \beta, \gamma, F_1, F_2, F_3$, 和 τ 给定的情况下, 约

束条件为

$$t_1 + t_2 = \tau \quad (14)$$

为计算方便, 引进热导率 $K_1 = \alpha F_1, K_{12} = \beta F_2, K_2 = \gamma F_3$, 则可将(13)式写成

$$U = \tau^{-1} (\frac{1}{K_{1t_1}} + \frac{1}{K_{12t_2}} + \frac{1}{K_{2t_1}})^{-1} \quad (15)$$

在(14)式的约束条件下, 由(15)式不难求得当

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2) K_{12}}{K_1 K_2}} \quad (16)$$

时 U 最大。将(16)式代入(12)式, 并应用(14)和(15)式, 可得这时联合制冷循环的最佳制冷率 R 与制冷系数 ϵ 的关系为

$$R = K (T_L - \frac{T_H}{1+\epsilon}) \quad (17)$$

其中

$$K = [(K_1^{-1} + K_2^{-1})^{1/2} + K_{12}^{-1/2}]^{-2} \quad (18)$$

(17)和(18)式是文献[1]的主要结果, 它与文献[3]所导得的最佳制冷率 R 与制冷系数 ϵ 的关系(即文献[3]中的(21)式)

$$R = K_{PC} F (T_L - \frac{T_H}{1+\epsilon}) \quad (19)$$

是不同的。因为两者的约束条件不同, 除了(14)式外, 后者还比前者多了两个约束条件:

$$F_1 = F_2 = F \quad (20)$$

$$F_3 = F_2 = F \quad (21)$$

式中

$$K_{PC} = [(\alpha^{-1} + \gamma^{-1})^{1/2} + \beta^{-1/2}]^{-2} \quad (22)$$

可见, (19)式仅适用于三个传热面积相同的情况, 而(17)式更为普遍, 既可用于三个传热面积相同的情况, 又可用于三个传热面积不同的情况。因此, 不能认为“(19)式就是文献[1]的主要结果^[3]”, 而应分清两者的区别和不同的适用范围,

3.2 给定 $\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2$, 和总传热面积 F_0 下的基本优化关系

现在考虑另一种约束情况, 设 $\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2$ 和总传热面积

$$F_0 = F_1 + F_2 + F_3 \quad (24)$$

给定, 即约束条件为(24)式所表示。这时可会

$\tau_1 = \alpha t_1, \tau_2 = \beta t_2, \tau_3 = \gamma t_1$, 将(13)式写成

$$U = \tau^{-1} \left(\frac{1}{F_1 \tau_1} + \frac{1}{F_2 \tau_2} + \frac{1}{F_3 \tau_3} \right)^{-1} \quad (25)$$

再对(25)式求优化,不难求得当

$$F_1 : F_2 : F_3 = \tau_3^{1/2} : \tau_2^{1/2} : \tau_1^{1/2} \quad (26)$$

时 U 最大,制冷率达最佳值。将(26)式代入(12)式,并应用(24)式,可得在(24)式的约束条件下,联合制冷循环的最佳制冷率 R 与制冷系数 ϵ 的关系为

$$R = F_0 K' \left(T_L - \frac{T_H}{1 + \epsilon^{-1}} \right) \quad (27)$$

其中

$$K' = (\tau_1^{-1/2} + \tau_2^{-1/2} + \tau_3^{-1/2})^{-2} \tau^{-1} \quad (28)$$

由(27)式又可求得给定制冷系数 ϵ 时的最佳制冷率密度 γ 与制冷系数 ϵ 的关系

$$\gamma = \frac{R}{F_0} = K' \left(T_L - \frac{T_H}{1 + \epsilon^{-1}} \right) \quad (29)$$

当 $t_1 = t_2 = \tau/2$ 时,(28)式可写成

$$K' = (\alpha^{-1/2} + \beta^{-1/2} + \gamma^{-1/2})^{-2} / 2 \quad (30)$$

文献[3]对定常态流联合制冷循环模型所导得的(文献[3]中的(27)式)

$$K_{sc} = (\alpha^{-1/2} + \beta^{-1/2} + \gamma^{-1/2})^{-2} \quad (31)$$

正好是 K' 的两倍。这不难理解,因为在定常态流循环模型中,整个循环周期内都进行热交换,而在活塞式循环模型中, $t_1 = t_2$ 时各热交换过程都仅在半个周期内进行,这相当于有效传热系数减小一半。这时若采用两个相同的活塞式联合制冷循环并接使用,并使它们交替地工作,即使其中一个联合循环与热源交换热量时,另一个联合循环在其内部串接的两个循环中交换热量,进行半个周期后,换成后者与热源交换热量,前者在循环内部交换热量,结果就相当于 K' 增大一倍,而有 $K' = K_{sc}$ 。这些结果清楚地表明了对于活塞式联合制冷循环,同样可对其传热面积进行优化,而且还可获得与定常态流联合制冷循环传热面积优化时相一致的结果。而非传热面积的优化仅适用于定常态流循环模型,对活塞式循环模型需用“有限时间特性代替有限面积特性^[4]”进行优化。一些文献把两种不同约束条件下的优化结果视为两种不同模型的结果也是不妥的。这样就难获得正确的结

论。

四、定常态流联合制冷循环的基本优化关系

对定常态流联合制冷循环模型,各热交换过程都是在整个循环周期内进行,故有

$$t_1 = t_2 = t_3 = \tau \quad (32)$$

因此,在给定的循环周期 τ 下,各传热过程的时间也就给定。于是它也可在(24)式的约束条件下进行优化。按上节类似的步骤,由(12)式可求得在(24)式约束条件下,循环的基本优化关系为

$$R = F_0 K_{sc} \left(T_L - \frac{T_H}{1 + \epsilon^{-1}} \right) \quad (33)$$

当 $K' = K_{sc}$ 时,(27)式与(33)式完全一样。这再次说明了上节所讨论以两个活塞式联合制冷循环交替地工作的联合制冷系统,在(24)式约束条件下的优化性能与同样约束条件下连续流联合制冷循环的相同。

无论对定常态流还是活塞式联合制冷循环模型,除了可在给定总传热面积[(24)式]的约束条件下求优化外,也可在其它约束条件下求优化。例如,若要求定常态流联合制冷循环中两个循环各自的总传热面积均为某一给定值 A 时,则可在约束条件

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_3 = A \quad (34)$$

下进行优化。结果可得基本优化关系为

$$R = A K'_{sc} \left(T_L - \frac{T_H}{1 + \epsilon^{-1}} \right) \quad (35)$$

其中

$$K'_{sc} = [(\alpha^{-1} + \gamma^{-1})^{1/2} + \beta^{-1/2}]^{-2} \quad (36)$$

(36)式与文献[3]对活塞式联合制冷循环所导得的(文献[3]中的(22)式)

$$K_{pc} = [(\alpha^{-1} + \gamma^{-1})^{1/2} + \beta^{-1/2}]^{-2} \quad (37)$$

完全相同。这再次表明了不能把不同约束条件下的结果视为不同模型的结果。

五、讨论和结论

1. (12)式是无中间热源联合制冷循环的制冷率和制冷系数的一个普遍关系式,无论对活塞式联合制冷循环还是定常态流联合制冷循环

都适用,两种循环均可由它求出不同约束条件下的基本优化关系。对(12)式求优化,实际上就是在所给的约束条件下求总的有效传热系数 U 的最佳值,使联合循环的性能最优。

2. 活塞式和定常态流两种联合制冷循环模型既可有相同的约束条件,又可有不同的约束条件,并非活塞式循环模型只能对传热时间求优化,而定常态流模型才可对传热面积求优化。因此,这两种循环模型的基本优化关系各有多种不同的形式,而且两种循环之间还可有相同的形式,主要决定于约束条件的形式。所以不能把不同约束条件下的结果视为不同模型的结果。

3. 活塞式联合制冷循环与定常态流联合制冷循环的主要区别在于物理机制的不同。其中最突出的一点是定常态流循环模型中各个热交换过程都是在循环的整个周期内进行,而活塞式循环模型中各个热交换过程一般只是在循环周期的一部分时间内进行,即循环的吸、放热一般交替地进行。所以对定常态流循环模型,主要探讨传热面积的优化。而对活塞式循环模型,既有探讨传热时间的优化,又有探讨传热面积的优化。

4. 从理论上说,定常态流制冷循环模型中工质的各个小部分所进行的循环与活塞式制冷循环中工质的循环相同,吸放热量也是在不同的时间内进行。而整个循环是由工质的各小部分循环一个紧接着一个连续工作的结果。由此可见,定常态流循环模型与活塞式循环模型虽然物理机制不同,但具有共同本质特征。事实上,上节所述的“在 $t_1=t_2$ 的情况下,采用两个相同的活塞式联合制冷循环交替地工作时,可在相同的约束条件下获得与定常态流联合制冷循环相同的优化结果”正是这两种模型间存在内在联系具有共同本质特征的一个例证。

5. 研究活塞式和定常态流两种联合制冷循环的优化性能及其主要区别时,应深入探讨这两种联合循环的基本特征,并从理论上分析其内在联系和主要区别以及不同约束条件对其所产生的根本影响,而不能把不同约束条件下不同的优化结果视为不同模型的结果。否则将难

深入揭示其本质属性。这是很值得我们注意的。

6. 对于 n 级串接的无中间热源的內可逆联合制冷循环(无论是定常态流还是活塞式循环)模型,按本文的方法也可导出类似于(12)式的制冷率 R 与制冷系数 ϵ 间的普遍关系

$$R=U_n(T_L-\frac{T_H}{1+\epsilon^{-1}}) \quad (38)$$

只不过 U_n 的表式与(13)式有所不同,应改为

$$U_n=[\tau \sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i F_i t_i)^{-1}]^{-1} \quad (39)$$

其中 α_i 、 F_i 和 t_i 分别表示联合循环中第 i 个传热面积上的传热系数、传热面积和传热时间。基于(38)和(39)式,便可对多级串接的联合制冷循环在各种约束条件下进行优化分析,求出循环的基本优化关系和各种优化性能。这说明本文的分析方法具有普遍意义,不仅适用于两级串接的联合制冷循环,而且可用于多级串接的联合制冷循环。

7. (38)式同样指出了,对內可逆联合制冷循环进行优化,主要就是要寻求在给定的约束条件下,如何使总的有效传热系数 U_n 为最大,亦即使总的有效热阻为最小。而联合制冷循环的总效果相当于单个制冷循环,只不过总的有效传热系数(或热阻)发生了变化,一般不同于联合循环中单个的循环。采用联合制冷循环的一个独特优点是可使制冷温度幅度大大地提高。所以联合制冷循环在低温技术领域具有重要意义。

参考文献

1. Chen J, Yan Z. Optimal performance of an endoreversible combined refrigeration cycle. J. Appl. Phys., 1988, 63(10): 4795—4798.
2. 李俊达, 两级串接的內可逆制冷机的最优构形, 厦门大学学报, 1988, 27(1): 53—58.
3. 陈林根, 孙丰瑞, 陈文振, 联合制冷循环的有限时间热力学, 低温工程, 1994(5): 11—17.
4. 陈林根, 孙丰瑞、陈文振, 热漏对制冷机制冷率制冷系数特性的影响. 低温与超导 1992, 20(4): 7—12.